华中科技大学

硕士学位论文

一维随机微分方程的稳定性

姓名：谢晶晶

申请学位级别：硕士

专业：应用数学

指导教师：雷冬霞

2011-05-15

摘 要

随机微分方程在很多领域中都有很广泛的应用，如在经济学中，人口生态学中等等. 给定一个常微分方程，它的解有可能是不稳定的，而相应的随机微分方程却可能是稳定的. 本文主要研究了随机微分方程的解的存在性与唯一性, 有界性及稳定性等问题.

本文第一章介绍了本文工作的背景及本文的主要工作. 第二章介绍了当随机微分方程 $dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t)$ 的系数 f 和 g 分别满足李普希茨条件和线性增长条件时, 该随机微分方程的解的一些性质, 包括解的存在性与唯一性, 依概率稳定, 几乎必然指数稳定和矩指数稳定等等. 在第二章的后两节中，研究了对于一个给定的随机微分方程系统, 一方面, 如果它的解为指数增长, 则噪声可以把它变为一个新的系统, 它的解是多项式增长的. 另一方面, 如果它的解是有界的, 噪声也可以把它变为一个新的系统, 它的解为指数增长的. 总而言之, 噪声既可以促进随机微分方程的指数增长也可以抑制它的指数增长. 在第三章中研究了随机微分方程 $dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t)$ 的稳定性，其中两个系数 f 和 g 都满足局部李普希茨条件， f 满足单边多项式增长条件，且 g 满足多项式增长条件. 本章中将说明合适的 β 可以保证该随机微分方程系统存在唯一的全局解，并且存在只与初始值有关的常数 K_p, 使该方程的解为有界的，最后还将讨论足够大的 q 能确保该系统的解满足几乎必然指数稳定性. 最后还给出了相应的例子进行说明.

关键词: 随机微分方程； 稳定性； 指数增长； 存在性； 有界性；
布朗运动； 噪声.

Abstract

Stochastic differential equations have a very wide range of applications in many areas , such as economics, population ecology and so on. Given an ordinary differential equation, its solution may be unstable, while the corresponding stochastic differential equation might be stable.This paper studies the existence and uniqueness of the solutions, boundedness and stability issues of the stochastic differential equations.

The first chapter introduces the background of this work and the main work of this paper. The second chapter describes the properties of the solutions of the stochastic differential equations $dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t)$, when the coefficient f and g of the stochastic differential equations satisfy the *Lipschitz* conditions and linear growth conditions, including the existence and uniqueness of the solutions, stability in probability, almost sure exponential stability and moment exponential stability and so on. In the last two sections of the second chapter, we have studied for a given stochastic differential system. On one hand, if the solution is for the exponential growth,then the noise can turn it into a new system, its solution is for the polynomial growth. On the other hand, if its solution is bounded, the noise can also turn it into a new system,its solution is for the exponential growth. All in all, the noise can not only promote the exponential growth of stochastic differential equations but also suppression the exponential growth of the equations. In the third chapter, we have studied the stability of the stochastic differential equations $dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t)$,both of the coefficients f and g satisfy *Lipschitz* conditions, f satisfies the unilateral polynomial growth condition, and g satisfy the polynomial growth condition. This chapter will explain that appropriate β can guarantee the existence and uniqueness of the global solution of stochastic differential equations,and there is a constant K_p dependent only on the initial value, such that the solution of the equations are bounded.Finally, we will also discuss the q large enough to ensure that the solution of the system to meet the almost sure exponential stability. Finally, corresponding examples are given for demonstration.

Key words: Stochastic differential equations; Stability; Exponential growth; Existence; Boundedness; Brownian motion; Noise.

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果. 尽我所知，除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果. 对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明. 本人完全意识到，本声明的法律结果由本人承担.

学位论文作者签名：

日期：　　年　　月　　日

学位论文版权使用授权书

作者完全了解学校有关保留，使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅. 本人授权华中科技大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印，缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文.

本论文属于　保密 □，在 ____ 年解密后适用本授权书.

　　　　　　不保密 □.

(请在以上方框内打 "√")

学位论文作者签名：　　　　　　指导教师签名：

日期：　　年　　月　　日　　　　日期：　　年　　月　　日

1 绪　论

1.1　本文研究的背景及现状

对于一个常微分方程系统

$$dx(t) = f(x(t), t)dt$$

它的解有可能是稳定的，也有可能是不稳定的.

我们大家都知道，噪声干扰可以使一个不稳定的系统变得稳定，也可以使一个稳定的系统变得更加稳定 [1]. 对于随机微分方程系统

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t)$$

的稳定性的研究，就是本论文的主要内容.

关于这一个论题, 这些年来很多学者都做了很多研究. 1981 年，$Hasminskii$[2] 最早通过使用两个白噪声资源, 使一个二维的线性系统变得稳定. 1983 年，$Arnold, Crauel$, 和 $Wihstutz$[3] 证明当且就当矩阵 A 的迹小于 0 时，期望值为 0 的平稳参数噪声可以使线性系统变得稳定.

对于一个一维的非线性系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \qquad t > 0;$$

其中 $f(0, t) = 0, x(0) = x_0 \in R$, 的稳定性的的研究，在毛老师的书 [1] 中有很详细的介绍. 2005 年，$Appleby$ 和 Mao[5],2008 年，$Appleby, Mao$ 和 $Rodkina$[6] 检验了当 f 满足单边线性增长条件时，随机微分方程系统的稳定性质.

2002 年，$Mao, Marion, Renshaw$[7] 和 2004 年 $Bahar, Mao$[8] 证明了一个非常重要的事实，就是环境噪声可以抑制人口生态学系统在有限时间内爆破.

2009 年，吴老师 [11] 研究了非线性系统的稳定性. 给定一个不稳定的微分方程

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

其中 f 满足单边多项式增长条件，引进两个布朗噪声反馈，随机地扰动上面的系统使它变成一个非线性的随机微分方程系统

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + qx(t)d\omega_1(t) + \sigma|x(t)|^\beta x(t)d\omega_2(t)$$

合适的系数将会保证该随机微分方程系统的全局解的存在性，有界性和指数稳定性.

1.2 本文的主要工作

本论文主要介绍的是当随机微分方程的系数满足线性增长条件或是满足多项式增长条件时，该随机微分方程系统的稳定性质.

第一章主要介绍了本文工作的研究背景及现状，还有对本文的主要工作的一些介绍，最后给出了本文需要用到的一些记号与定理.

第二章主要介绍了当随机微分方程的系数满足李普希茨条件和线性增长条件的时候，即 $f(x,t)$ 和 $g(x,t)$ 满足条件

$$|f(x,t) - f(y,t)|^2 \vee |g(x,t) - g(y,t)|^2 \le \bar{K}|x-y|^2$$

和

$$|f(x,t)|^2 \vee |g(x,t))|^2 \le K(1+|x|^2)$$

时，随机微分方程的解是存在的并且是唯一的，且在一定的条件下，它的解可能会满足依概率稳定，几乎必然指数稳定和矩指数稳定等等. 第二章的后两节主要介绍了噪声可以抑制随机微分方程的指数增长，也就是说对于一个指数增长的微分方程，在一定的条件下，噪声可以使它变为多项式增长. 其次，对于一个有界的微分方程系统，噪声也可以促进相应的随机微分方程系统的指数增长.

第三章是文章的主要内容，主要介绍了当随机微分方程的系数满足多项式增长条件时，即 f 满足单边多项式增长条件

$$xf(x(t),t) \le \delta x^{\alpha+2} + \gamma x^2$$

和 g 满足多项式增长条件

$$g^2(x,t) \le \sigma x^{\beta+2} + qx^2$$

的时候，该随机微分方程的解的存在性与唯一性，有界性和稳定性等等. 本章内容分节介绍了这些性质，首先介绍了在系数 $\beta > \alpha > 0$ 情况下，该随机微分方程系统的解是存

在的并且是唯一的，其次，也要在 $\beta > \alpha > 0$ 满足的情况下，足够大的系数 q 是可以保证该随机微分方程的解是几乎必然指数稳定的.

以上就是本硕士论文的主要工作，其中在定理的后面有举出了一些例子来更好地说明定理的成立性.

1.3 基本记号与概念

给定如下随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \tag{1.1}$$

其中 $f : R \times R_+ \to R$ 与 $g : R \times R_+ \to R$ 都是 Borel 可测函数.

在这篇文章中，下面的这些记号和定理引理是我们可能需要用到的，令 $|\cdot|$ 表示 R 上的欧几里得范数；若 A 为一个矩阵，则它的迹范数为

$$|A| = \sqrt{trace(A^T A)}$$

$\langle X, Y \rangle$ 表示向量 X, Y 的内积；对任意的 $a, b \in R$ ， $a \vee b$ 表示 a, b 中的较大值，$a \wedge b$ 表示 a, b 中的较小值.

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 为一个完备概率空间，且有一个满足一般条件的流 $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ ，所以当 $\mathcal{F}_0$ 包含所有的空集时， $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ 是一个右连续且单调的序列. $B(t)$ 是定义在这个概率空间上的一个独立的标量布朗运动. $L^p_{\mathcal{F}_t}(\Omega, R)$ 表示 R 值的 $\mathcal{F}_t$ 可测的随机变量类，且随机变量 ξ 满足 $E|\xi|^P < \infty$ ，而 $L^p_{\mathcal{F}_t}(\Omega, R)$ 表示 $\mathcal{F}_t$ 可测有界的 R 值随机变量类.

在下面的内容中，我们将会研究随机微分方程的解的存在性和解的一些渐近性质，对于给定的初始值，我们记为

$$x(0) = \xi \in L^b_{\mathcal{F}_0}(\Omega, R),$$

并且我们定义由此初始值而所得的方程的解记为 $x(t, \xi)$ 或简记为 $x(t)$ ，其中 $t \geq 0$.

引理 1.1 **(**$Borel - Cantelli's$ 引理**)**[1] (1) 如果存在一个序列 $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ ，且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty,$$

则我们可以推出

$$P(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 0$$

这也就是说，存在一个集合 $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, 并且它满足 $P(\Omega_0) = 1$, 且存在一个整数值的随机变量 k_0 ，使得对于任意的 $\omega \in \Omega_0$ ，当 $k \geq k_0(\omega)$ 时，都有 $\omega \notin A_k$ 成立.

(2) 如果序列 $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ 是独立的，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty,$$

则

$$P(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 1$$

也就是说，存在一个集合 $\Omega_\theta \in \mathcal{F}$ ，满足 $P(\Omega_\theta) = 1$ ，且对于任意的 $\omega \in \Omega_\theta$ ，都存在一个子序列 $\{A_{k_i}\}$ ，使得每一个 A_{k_i} 都包含元素 ω.

引理 1.2 ($Young$ 不等式)　如果存在常数 $x, y, \alpha, \beta \geq 0$, 且满足 $\alpha + \beta \geq 0, \varepsilon > 0$, 则下面的式子是成立的

$$x^\alpha y^\beta \leq \frac{\alpha(\varepsilon^{1/\alpha} x)^{\alpha+\beta} + \beta(\varepsilon^{-1/\beta} y)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}$$

特别地，如果我们取 $\varepsilon = 1$ 则可以得到

$$x^\alpha y^\beta \leq \frac{\alpha x^{\alpha+\beta} + \beta y^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}$$

取 $\alpha = \beta = 1$(且以 ε 代替 ε^2) 可得

$$2xy \leq \varepsilon x^2 + \varepsilon^{-1} y^2$$

或

$$xy \leq \varepsilon x^2 + y^2/4\varepsilon$$

定理 1.1 (强大数定律)[1]　令 $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ 是一个连续的实值局部鞅，且在 $t = 0$ 时变为零，则

$$\lim_{t\to\infty} \langle M, M\rangle_t = 0 \quad a.s. \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{\langle M, M\rangle_t} = 0 \quad a.s.$$

或

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\langle M, M\rangle_t}{t} < \infty \quad a.s. \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{t} = 0 \quad a.s.$$

定义 1.1[1]　一个一维的 $It\hat{o}$ 过程，如果当 $t \geq 0$ 时，满足

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dB(s)$$

则 $x(t)$ 称为一个连续的适应过程，其中 $f \in \mathcal{L}^1(R;R_+), g \in \mathcal{L}^2(R;R_+)$.

定理 1.2 (一维的 $It\hat{o}$ 公式)[1] 当 $t \geq 0$ 时， $x(t)$ 是一个满足随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t)$$

的 $It\hat{o}$ 过程，且 $f \in \mathcal{L}^1(R;R_+), g \in \mathcal{L}^2(R;R_+)$. 令 $V = C^{2,1}(R \times R_+;R)$ ，则 $V(x(t),t)$ 也是一个 $It\hat{o}$ 过程，并且它的随机微分为下面的形式

$$\begin{aligned} dV(x(t),t) &= [V_t(x(t),t) + V_x(x(t),t)f(t) + \frac{1}{2}V_{xx}(x(t),t)g^2(t)]dt \\ &+ V_x(x(t),t)g(t)dB(t) \quad a.s. \end{aligned}$$

定理 1.3[1] 令 $p \geq 2, g \in \mathcal{M}^2([0,T];R^{d\times m})$

则

$$E\int_0^T |g(s)|^p ds < \infty,$$

且

$$E\int_0^T |g(s)dB(s)|^p \leq (\frac{p(p-1)}{2})^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} E\int_0^T |g(s)|^p ds.$$

当且仅当 $p=2$ 时，等号成立.

定理 1.4[1] 令 $p \geq 2, g \in \mathcal{M}^2([0,T];R^{d\times m})$

则

$$E\int_0^T |g(s)|^p ds < \infty,$$

且

$$E(\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^T |g(s)dB(s)|^p) \leq (\frac{p^2}{2(p-1)})^{p-2} T^{\frac{p-2}{2}} E\int_0^T |g(s)|^p ds.$$

当且仅当 $p=2$ 时，等号成立.

定理 1.5 (BDG 不等式)[1] 令 $g \in \mathcal{L}^2(R_+;R^{d\times m})$, 对 $t \geq 0$,

定义

$$x(t) = \int_0^t g(s)dB(s),$$

和

$$A(t) = \int_0^t |g(s)|^2 ds.$$

则对任意的 $p > 0$, 存在通用的正常数 c_p 和 C_p(均与 p 有关) ，满足

$$c_p E|A(t)|^{\frac{P}{2}} \leq E(\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)|^p) \leq C_p E|A(t)|^{\frac{P}{2}}$$

对所有的 $t \geq 0$, 我们还可以取如下的特殊值：

$$
\begin{aligned}
&c_p=(p/2)^p, && C_p=(32/p)^{p/2}, && \text{当 } 0<p<2 \text{ 时;}\\
&c_p=1, && C_p=4, && \text{当 } p=2 \text{ 时;}\\
&c_p=(2p)^{-p/2}, && C_p=[p^{p+1}/2(p-1)^{p-1}]^{p/2}, && \text{当 } p>2 \text{ 时.}
\end{aligned}
$$

定理 1.6 (指数鞅不等式)[1] 令 $g=(g_1,g_2,\cdots g_m)\in\mathcal{L}^2(R_+;R^{1\times m})$, 且令 T,α,β 都是正数，则有

$$
P\{\sup_{0\le t\le T}[\int_0^T g(s)dB(s)-\frac{\alpha}{2}\int_0^t|g(s)|^2ds]>\beta\}\le e^{-\alpha\beta}.
$$

定理 1.7 (*Gronwall* 不等式)[1] 令 $T>0, C\ge 0$, 令 $\mu(\cdot)$ 是一个定义在 $[0,T]$ 上的 *Borel* 可测有界的非负函数，而 $\upsilon(\cdot)$ 则是一个定义在 $[0,T]$ 上的非负可积函数，如果

$$
\mu(t)\le C+\int_0^T\upsilon(s)\mu(s)ds,\qquad 0\le t\le T
$$

则有

$$
\mu(t)\le C\exp(\int_0^T\upsilon(s)ds),\qquad 0\le t\le T
$$

定理 1.8 (解的存在性与唯一性定理)[1] 假设存在两个正常数 K 和 $\bar{K}$ 满足

(1)(利普希茨条件) 对于所有的 $x,y\in R$ 和 $t\in[t_0,T]$, 有下面的式子成立

$$
|f(x,t)-f(y,t)|^2\vee|g(x,t)-g(y,t)|^2\le\bar{K}|x-y|^2 \tag{1.2}
$$

(2)(线性增长条件) 对于所有的 $(x,t)\in R\times[t_0,T)$, 也有下面的式子成立

$$
|f(x,t)|^2\vee|g(x,t))|^2\le K(1+|x|^2) \tag{1.3}
$$

则方程 (1.1) 存在一个唯一的解 $x(t)$, 且 $x(t)\in\mathcal{M}^2([t_0,T],R)$.

定理 1.9[1] 在单边线性增长条件成立的情况下，方程 (1.1) 的样本 *Lyapunov* 指数应该是不大于 α 的，也就是

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log|x(t)|\le\alpha\quad a.s.
$$

其中

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log|x(t)|
$$

称为样本 *Lyapunov* 指数.

单边线性增长条件为：存在正数 α, 对所有的 $(x,t)\in R\times[t_0,\infty)$, 有

$$
x^\top f(x,t)+\frac{1}{2}|g(x,t)|^2\le\alpha(1+|x|^2)
$$

成立.

定理 1.10 (*Chebyshev's* 不等式)[1]　如果常数 $c > 0, p > 0$ 且 $X \in \mathcal{L}^p$, 则有不等式

$$P\{\omega : |X(\omega)| \geq c\} \leq c^{-p} E|X|^p$$

成立.

2 系数满足线性增长条件的随机微分方程的稳定性

在这一章中，我们将介绍当随机微分方程的系数满足利普希茨条件和线性增长条件时，它的一些稳定性质. 我们给定如下随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \tag{1.4}$$

其中 $t \geq t_0$, 且 $f : R \times R_+ \to R$ 与 $g : R \times R_+ \to R$ 是 $Borel$ 可测函数，并且满足 $f(x(0), 0) \equiv 0, g(x(0), 0) \equiv 0$. 在这里，我们假设所给出的方程都是满足解的存在性与唯一性定理的，也就是满足定理 1.8 的. 即存在两个正常数 K 和 $\bar{K}$ 满足

(1)(利普希茨条件) 对于所有的 $x, y \in R$ 和 $t \in [t_0, T]$, 有

$$|f(x,t) - f(y,t)|^2 \vee |g(x,t) - g(y,t)|^2 \leq \bar{K}|x-y|^2$$

成立.

(2)(线性增长条件) 对于所有的 $(x,t) \in R \times [t_0, T)$, 有

$$|f(x,t)|^2 \vee |g(x,t))|^2 \leq K(1+|x|^2)$$

成立.

其中初始值为 $x(t_0) = x_0 \in R$, 则方程 (1.4) 存在唯一的一个解，我们把它记为 $x(t; t_0, x_0)$, 简记为 $x(t)$.

我们先给出这一章中所需要的一些定义：记 $\mathcal{K}$ 为所有的连续非减函数类：

$$\mu : R_+ \to \mu : R_+,$$

因此 $\mu(0) = 0$, 且如果 $r > 0$, 则 $\mu(r) > 0$.

对任意的 $h > 0$, 令 $S_h = \{x \in R : |x| < h\}$.

正定函数的定义：一个定义在 $S_h \times [t_0, \infty)$ 上的函数称为正定的，如果 $V(0,t) \equiv 0$, 且对于 $\mu \in \mathcal{K}$ 有

$$V(x,t) \geq \mu(|x|),$$

对所有的 $(x,t) \in S_h \times [t_0, \infty)$ 都成立.

一个函数 V 被称为是负定的，如果 $-V$ 是正定的.

一个连续的非负函数 $V(x,t)$ 被称为是衰减的，如果对一些 $\mu \in \mathcal{K}$ 有

$$V(x,t) \leq \mu(|x|),$$

对所有的 $(x,t) \in S_h \times [t_0,\infty)$ 都成立.

一个定义在 $R \times [t_0,\infty)$ 上的函数 $V(x,t)$, 如果有

$$\liminf_{|x|\to\infty \ t\geq t_0} V(x,t) = \infty,$$

则这个函数称为是径向无界的.

记 $C^{1,1}(S_h \times [t_0,\infty); R_+)$ 为所有从 $S_h \times [t_0,\infty)$ 到 R_+ 上存在一阶连续偏导数的连续函数 $V(x,t)$.

2.1 依概率稳定

在这一节中，我们将讨论依概率稳定这一问题，我们令初始值 x_0 是一个常数而不是一个随机变量.

定义 2.1[1]　(1) 方程 (1.4) 的解称为是随机稳定的或是依概率稳定的，如果对于任意的 $\varepsilon \in (0,1)$ 和与之相应的 $r > 0$, 存在一个 $\delta = \delta(\varepsilon, r, t_0) > 0$ 满足

$$P\{|x(t;t_0,x_0)| < 0, \forall \quad t \geq t_0\} \geq 1 - \varepsilon$$

这里 $|x_0| < \delta$. 否则称方程 (1.4) 的解是随机不稳定的.

(2) 方程的解称为是随机渐近稳定的，如果它是随机稳定的，并且对任意的 $\varepsilon \in (0,1)$ ，存在一个 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0) > 0$ 满足

$$P\{\lim_{t\to\infty} |x(t;t_0,x_0)| = 0\} \geq 1 - \varepsilon$$

这里 $|x_0| < \delta_0$.

(3) 方程的解称为是全局随机渐近稳定的，如果它是随机稳定的，并且对所有的 $x_0 \in R$, 有

$$P\{\lim_{t\to\infty} |x(t;t_0,x_0)| = 0\} = 1$$

成立.

定理 2.1[1]　如果存在一个正定函数

$$V(x,t) \in C^{2,1}(S_h \times [t_0,\infty); R_+),$$

对所有的 $(x,t) \in S_h \times (t_0, \infty)$, 都有 $LV(x,t) \leq 0$ 成立，则称方程 (1.4) 的解是随机稳定的.

定理 2.2[1] 如果存在一个正定衰减的函数

$$V(x,t) \in C^{2,1}(S_h \times [t_0, \infty); R_+),$$

并且 $LV(x,t)$ 是负定的，则称方程 (1.4) 的解是随机渐近稳定的.

定理 2.3[1] 如果存在一个正定衰减并且径向无界的函数

$$V(x,t) \in C^{2,1}(R \times [t_0, \infty); R_+),$$

使得 $LV(x,t)$ 是负定的，则称方程 (1.4) 的解是全局随机渐近稳定的.

2.2 几乎必然指数稳定

定义 2.2[1] 方程 (1.4) 的解被称为是几乎必然指数稳定的，如果对所有的 $x_0 \in R$, 有

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log |x(t; t_0, x_0)| < 0 \quad a.s.$$

成立.

引理 2.1[1] 对于所有在 R 中的初始值 $x_0 \neq 0$, 都有

$$P\{|x(t; t_0, x_0)| \neq 0, \forall \quad t \geq t_0\} = 1$$

也就是说，解的任何从非零状态开始的样本路径都不会再回到原点.

定理 2.4[1] 假设存在一个函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(R \times [t_0, \infty); R_+)$, 和常数 $p > 0, c_1 > 0, c_2 \in R, c_3 \geq 0$, 对所有的 $x \neq 0$ 和 $t \geq t_0$ 有

(1) $c_1|x|^p \leq V(x,t)$,

(2) $LV(x,t) \leq c_2 V(x,t)$,

(3) $|V_x(x,t)g(x,t)|^2 \geq c_3 V^2(x,t)$.

则

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sup |x(t; t_0, x_0)| \leq -\frac{c_3 - 2c_2}{2p} \quad a.s.$$

对所有的 $x_0 \in R$ 均成立.

特殊地，如果 $c_3 > 2c_2$, 则方程 (1.4) 的解就称为是几乎必然指数稳定的.

推论 2.1[1] 假设存在一个函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(R \times [t_0,\infty); R_+)$, 和正数 p,α,λ, 使得对所有的 $x \neq 0, t \geq t_0$ ，有

$$\alpha|x|^p \leq V(x,t),$$

且

$$LV(x,t) \leq -\lambda V(x,t).$$

则

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} log|x(t;t_0,x_0)| \leq -\frac{\lambda}{p} \quad a.s.$$

对所有的 $x_0 \in R$ 均成立.

换句话说，方程 (1.4) 的解就称为是几乎必然指数稳定的.

定理 2.5[1] 假设存在一个函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(R \times [t_0,\infty); R_+)$, 和常数 $p > 0, c_1 > 0, c_2 \in R, c_3 > 0$, 使得对于所有的 $x \neq 0$ 和 $t \geq t_0$, 有

(1) $c_1|x|^p \geq V(x,t) > 0$,

(2) $LV(x,t) \geq c_2 V(x,t)$,

(3) $|V_x(x,t)g(x,t)|^2 \leq c_3 V^2(x,t)$.

则

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |x(t;t_0,x_0)| \geq -\frac{2c_2 - c_3}{2p} \quad a.s.$$

对所有在 R 中的 $x_0 \neq 0$ 均成立.

特殊地，如果 $2c_2 > c_3$, 则 $|x(t;t_0,x_0)|$ 的几乎所有的样本路径将会趋向无穷大，我们称在这种情况下，方程 (1.4) 的解是几乎必然指数不稳定的.

2.3 矩指数稳定

定义 2.3[1] 如果存在一对正数 λ 和 C, 对所有的 $x_0 \in R$ 都满足

$$E|x(t;t_0,x_0)|^p \leq C|x_0|^p e^{-\lambda(t-t_0)}, t \geq t_0$$

则称方程 (1.4) 的解是 p 阶矩指数稳定的.

当 $p = 2$ 时，通常称方程的解是均方指数稳定的.

定理 2.6[1] 假设存在一个正常数 K, 满足

$$x^\top f(x,t) \vee |g(x,t)|^2 \leq K|x|^2$$

对所有的 $(x,t)\in R\times[t_0,\infty)$ 均成立，则由方程 (1.4) 的解是 p 阶矩指数稳定的可以推出它的解是几乎必然指数稳定的.

定理 2.7[1] 假设存在一个函数 $V(x,t)\in C^{2,1}(R\times[t_0,\infty);R_+)$, 和正数 c_1,c_2,c_3, 则有

$$c_1|x|^p\leq V(x,t)\leq c_2|x|^p$$

和

$$LV(x,t)\leq -c_3V(x,t),$$

对所有的 $(x,t)\in R\times[t_0,\infty)$ 均成立，且

$$E|x(t;t_0,x_0)|^p\leq\frac{c_2}{c_1}|x_0|^pe^{-c_3(t-t_0)},t\geq t_0$$

对所有的 $x_0\in R$ 均成立，也就是说方程 (1.4) 的解是 p 阶矩指数稳定的.

定理 2.8[1] 令 $q>0$, 假设存在一个函数 $V(x,t)\in C^{2,1}(R\times[t_0,\infty);R_+)$, 和正数 c_1,c_2,c_3, 则有

$$c_1|x|^q\leq V(x,t)\leq c_2|x|^q$$

和

$$LV(x,t)\geq c_2V(x,t),$$

对所有的 $(x,t)\in R\times[t_0,\infty)$ 均成立，且

$$E|x(t;t_0,x_0)|^q\geq\frac{c_1}{c_2}|x_0|^pe^{c_3(t-t_0)},t\geq t_0$$

对所有的 $x_0\in R$ 均成立，则我们说方程 (1.4) 的解是 p 阶矩指数不稳定的.

2.4 噪声抑制指数稳定

在这一节中，我们将介绍噪声干扰是可以抑制给定系统的指数增长，使它变为多项式增长的.

假设 2.1 假设两个系数 f 和 g 都满足局部利普希茨条件，也就是说，对于每一个 $k=1,2,\cdots$, 存在一个正数 H_k, 使得

$$|f(x,t)-f(y,t)|\vee|g(x,t)-g(y,t)|\leq H_k|x-y|$$

对所有的 $t\geq 0$ 均成立，并且 $x,y\in R,|x|\vee|y|\leq k$.

假设 2.2 假设存在非负常数 α, β, η 和 γ, 满足

$$\langle x, f(x,t)\rangle \leq \alpha + \beta|x|^2$$

和

$$|g(x,t)|^2 \leq \eta + \gamma|x|^2$$

对所有的 $(x,t) \in R \times R_+$ 均成立，则存在常数 T, 使得

$$x^\top f(x,t) + \frac{1}{2}|g(x,t)|^2 \leq T(1+|x|^2),$$

(其中 $T = \max(\alpha + \frac{1}{2}\eta, \beta + \frac{1}{2}\gamma)$).

由定理 (1.8) 可知，在假设 $2.1, 2.2$ 满足的条件下，随机微分方程 (1.4) 在 $t \in R_+$ 上有一个唯一的全局解 $x(t)$, 而由定理 (1.9) 我们可以知道，方程 (1.4) 的解满足

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log|x(t)| \leq T \quad a.s.$$

这也就是说，方程 (1.4) 的解将会依概率指数增长，下面的定理将会说明，足够大的噪声干扰可以抑制解的指数增长，而使它变为多项式增长.

定理 2.9[12] 令假设 $2.1, 2.2$ 都成立，并且假设还存在两个正常数 δ 和 ρ, 使得对所有的 $(x,t) \in R \times R_+$, 有

$$|x^\top g(x,t)|^2 \geq \delta|x|^4 - \rho.$$

如果有 $\delta > \beta + \frac{1}{2}\gamma$ 成立，则方程 (1.4) 的解将会满足

$$\limsup_{t\to\partial} \frac{\log(|x(t)|)}{\log t} \leq \frac{\delta}{2\delta - 2\beta - \gamma} \quad a.s.$$

证 选取合适的 θ 使它满足

$$0 < \theta < \frac{2\delta - 2\beta - \gamma}{\delta}$$

令

$$V = (1+|x|^2)^\theta,$$

则由 $It\hat{o}$ 公式我们可得,

$$dV = d[(1+|x|^2)^\theta] = LVdt + M(t) \tag{2.5}$$

其中

$$LV = \theta(1+|x|^2)^{\theta-1}(2x^\top f + |g|^2) + 2\theta(\theta-1)(1+|x|^2)^{\theta-2}|x^\top g|^2,$$

$$M(t) = 2\theta(1+|x|^2)^{\theta-1}x^\top g dB(t).$$

所以由假设 (2.2) 可以得到

$$\begin{aligned} LV &\leq \theta(1+|x|^2)^{\theta-2} \times [(1+|x|^2)[2\alpha+\eta+(2\beta+\gamma)|x|^2] \\ &- 2(1-\theta)(\delta|x|^4-\rho)] \\ &= \theta(1+|x|^2)^{\theta-2}[2\alpha+\eta+2\rho+(2\alpha+\eta+2\beta+\gamma)|x|^2 \\ &- [2\delta(1-\theta)-2\beta-\gamma]|x|^4] \end{aligned}$$

再令

$$\bar{V} = e^{\varepsilon t}(1+|x|^2)^\theta,$$

则由 $It\hat{o}$ 公式可得

$$d\bar{V} = L\bar{V}dt + \bar{L}(t),$$

和

$$\bar{M}(t) = 2\theta e^{\varepsilon t}(1+|x|^2)^{\theta-1}x^\top g dB(t)$$

且

$$\begin{aligned} L\bar{V} &\leq \varepsilon e^{\varepsilon t}(1+|x|^2)^\theta + e^{\varepsilon t}LV \\ &= \theta e^{\varepsilon t}(1+|x|^2)^{\theta-2}[\frac{\varepsilon}{\theta}(1+|x|^2)^2] + e^{\varepsilon t}LV \\ &\leq \theta e^{\varepsilon t}(1+|x|^2)^{\theta-2}[\frac{\varepsilon}{\theta}(1+|x|^2)^2 + 2\alpha+\eta+2\rho \\ &+ (2\alpha+\eta+2\beta+\gamma)|x|^2 - (2\delta(1-\theta)-2\beta-\gamma)|x|^4] \end{aligned}$$

选取足够小的 $\varepsilon > 0$, 并使它满足

$$\frac{\varepsilon}{\theta} < 2\delta(1-\theta) - 2\beta - \gamma,$$

则由多项式函数的有界性可知，存在正数 C_1, 使得对任意的 $x \in R$, 都有

$$\theta(1+|x|^2)^{\theta-2}(\frac{\varepsilon}{\theta}(1+|x|^2)^2 + 2\alpha+\eta+2\rho$$

$$+(2\alpha+\eta+2\beta+\gamma)|x|^2 - (2\delta(1-\theta)-2\beta-\gamma)|x|^4) \leq C_1$$

则

$$d\bar{V} \le C_1 e^{\varepsilon t} dt + \bar{M}(t),$$

即

$$d\bar{V} \le C_1 e^{\varepsilon t} dt + 2\theta e^{\varepsilon t}(1+|x|^2)^{\theta-1} x^\top g dB(t)$$

所以对上式两边先求期望再求积分可得

$$\int_0^t E d[e^{\varepsilon s}(1+|x(s)|^2)^\theta] \le \int_0^t E C_1 e^{\varepsilon s} ds$$

即

$$E[e^{\varepsilon t}(1+|x(t)|^2)^\theta] \le (1+|x_0|^2)^\theta] + \frac{C_1}{\varepsilon} e^{\varepsilon t},$$

所以

$$\limsup_{t\to\infty} E[(1+|x(t)|^2)^\theta] \le \frac{C_1}{\varepsilon}. \tag{2.6}$$

进一步我们把 C_1 带到 (2.5) 式中可以得到

$$d[(1+|x(t)|^2)^\theta] \le C_1 dt + 2\theta(1+|x(t)|^2)^{\theta-1} x^\top(t) g(x(t),t) dB(t)$$

两边积分可得

$$E(\sup_{t\le u\le t+1}(1+|x(u)|^2)^\theta) \le E[(1+|x(t)|^2)^\theta] + C_1$$

$$+2\theta E(\sup_{t\le u\le t+1}|\int_t^u (1+|x(s)|^2)^{\theta-1} x^\top(s) g(x(s),s) dB(s)|)$$

但是，由著名的 BDG 不等式，我们可以得到

$$\begin{aligned}
2 \quad & \theta E(\sup_{t\le u\le t+1}|\int_t^u (1+|x|^2)^{\theta-1} x^\top g dB(s)|) \\
\le \quad & 2\theta E(\int_t^{t+1}(1+|x|^2)^{2\theta-2}|x^\top g|^2 ds)^{\frac{1}{2}} \\
\le \quad & 2\theta E(\int_t^{t+1}(1+|x|^2)^{2\theta-2}|x|^2 \times (\eta+\gamma|x|^2) ds)^{\frac{1}{2}} \\
\le \quad & 2\theta\sqrt{\eta\vee\gamma} E([\sup_{t\le s\le t+1}(1+|x|^2)^\theta] \times \int_t^{t+1}(1+|x|^2)^\theta)^{\frac{1}{2}} \\
\le \quad & \frac{1}{2} E[\sup_{t\le s\le t+1}(1+|x|^2)^\theta] + 2\theta^2(\eta\vee\gamma) E\int_t^{t+1}(1+|x|^2)^\theta ds
\end{aligned}$$

把上式带到前面的式子中我们可以得到

$$E(\sup_{t\le u\le t+1}(1+|x(u)|^2)^\theta) \le 2E[(1+|x(t)|^2)^\theta]$$

$$+2C_1+4\theta^2(\eta\vee\gamma)\int_t^{t+1}E(1+|x(s)|^2)^{\theta}ds$$

令 $t\to\infty$, 并且运用 (2.6) 式，我们将得到

$$\limsup_{t\to\infty}E(\sup_{t\leq u\leq t+1}(1+|x(u)|^2)^{\theta})\leq 2C_1[(1+\frac{1}{\varepsilon}(1+4\theta^2(\eta\vee\gamma))]$$

因此，一定存在一个正数 C_2 满足

$$E(\sup_{k\leq u\leq k+1}|x(u)|^{2\theta})\leq C_2,\quad k=1,2,\cdots$$

再令 $\bar{\varepsilon}>0$ 为任意的，则由 $Chebyshev$ 不等式，可得

$$P\{\sup_{k\leq u\leq k+1}|x(u)|^{2\theta}>k^{1+\bar{\varepsilon}}\}\leq\frac{C_2}{k^{1+\bar{\varepsilon}}},\quad k=1,2,\cdots$$

再应用 $Borel-Cantelli$ 引理，我们可以得到，对几乎所有的 $\omega\in\Omega$, 有

$$\sup_{k\leq t\leq k+1}|x(t)|^{2\theta}\leq k^{1+\bar{\varepsilon}}.$$

除了有限的 k 外，其他都成立.

因此，存在一个 $k_0(\omega)$, 对几乎所有的 $\omega\in\Omega$, 当 $k\geq k_0$ 时，上式都是成立的．因此，对于几乎所有的 $\omega\in\Omega$, 如果有 $k\geq k_0$ 且 $k\leq t\leq k+1$, 则有

$$\frac{\log(|x(t)|^{2\theta})}{\log t}\leq\frac{(1+\bar{\varepsilon})\log k}{\log k}=1+\bar{\varepsilon}$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log|x(t)|}{\log t}\leq\frac{1+\bar{\varepsilon}}{2\theta}\quad a.s.$$

令 $\bar{\varepsilon}\to 0$, 则有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log|x(t)|}{\log t}\leq\frac{1}{2\theta}\quad a.s.$$

因此这里的 θ 满足即

$$0<\theta<\frac{2\delta-2\beta-\gamma}{2\delta}$$

所以

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log(|x(t)|)}{\log t}\leq\frac{\delta}{2\delta-2\beta-\gamma}\quad a.s.$$

例 1 对于随机微分方程

$$dx=f(x,t)dt+g(x,t)dB(t)$$

如果我们定义

$$f(x,t) = a + bx,$$

和

$$g(x,t) = \sigma x$$

其中 $(x,t) \in R \times R_+, B(t)$ 是一个标量布朗运动.

则在这种情况下，我们可以得到

$$|g(x,t)|^2 = \sigma^2 x^2,$$

和

$$|xg(x,t)|^2 = \sigma^2 x^4,$$

并且对于任意小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} x^\top f(x,t) &= ax + bx^2 \\ &\leq \frac{2a^2}{\varepsilon} + (b+\varepsilon)x^2 \end{aligned}$$

则由定理 (2.9), 我们可以得到该方程的解满足

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log(|x(t)|)}{\log t} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 2(b+\varepsilon)} \quad a.s.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 我们可以得到

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log(|x(t)|)}{\log t} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 2b} \quad a.s.$$

也就是说方程的解依多项式增长.

例 2 我们先考虑一个简单是线性标量常微分方程

$$\dot{y}(t) = a + by(t),$$

其中 $t \geq 0$, 且初始值 $y(0) = y_0 > 0$, 这里 $a, b > 0$.

解这个常微分方程，我们可以得到它的解为

$$y(t) = (y_0 + \frac{a}{b})e^{bt} - \frac{a}{b}.$$

因此就有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(y(t)) = b.$$

也就是说，上述常微分方程的解趋向于无穷指数增长.

如果我们随机地扰动这个方程，把它变成一个线性的随机微分方程，

$$dx(t) = [a + bx(t)]dt + \sigma x(t)dB(t).$$

其中 $t \geq 0$, 且 $\sigma > 0, B(t)$ 是一个标量布朗运动，且初始值为 $x(0) = x_0 > 0$.

则这个随机微分方程有显解

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp[(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)] \\ &\times (x_0 + a\int_0^t \exp[(b - \frac{1}{2}\sigma^2)s + \sigma B(t)]ds) \end{aligned}$$

从上面的解中，我们可以看到，当 $\sigma^2 > 2b$ 时，则上述随机微分方程的解满足

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log(x(t))}{\log t} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 2b} \quad a.s.$$

这也就是说，对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个正的随机变量 T_ε 依概率满足

$$x(t) \leq t^{\varepsilon + \sigma^2/(\sigma^2 - 2b)},$$

对任意的 $t \geq T_\varepsilon$ 均成立. 这也就是说，随机微分方程的解将会依多项式增长.

2.5 噪声促进指数稳定

在这一节中，我们将介绍噪声干扰可以促进给定系统的指数增长，它可以使一个有界的系统变为指数增长.

定理 2.10[12] 假设存在非负数 $c_1 - c_6$ 满足

$$c_5 > c_1, \quad c_6 > c_2 + 2c_4,$$

$$\begin{aligned} -2\langle x^\top f(x,t)\rangle &\leq c_1 + c_2|x|^2, \\ |x^\top g(x,t)|^2 &\leq c_3|x|^2 + c_4|x|^4. \end{aligned} \tag{2.7}$$

并且

$$|g(x,t)|^2 \geq c_5 + c_6|x|^2. \tag{2.8}$$

对所有的 $(x,t) \in R \times R_+$ 均成立.

令 $a = c_5 - c_1, b = c_6 - c_2 - 2c_4$ 和 $c = c_5 - c_1 + c_6 - c_2 - 2c_3$.

(1) 如果 $c \geq 2(a \wedge b)$, 则方程 (1.4) 的解满足

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |x(t)| \geq (a \wedge b) \quad a.s.$$

(2) 如果 $c < 2(a \wedge b)$, 即 $ab > \frac{1}{4}c^2$, 则方程 (1.4) 的解满足

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |x(t)| \geq \frac{1}{2} \min\{a, b, \frac{ab - 0.25c^2}{a + b - c}\} \quad a.s.$$

证 由 $It\hat{o}$ 公式, (2.7) 和 (2.8) 式, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
d[\log(1 + |x(t)|^2)] &= (\frac{2\langle x(t), f(x(t), t)\rangle + |g(x(t), t)|^2}{1 + |x(t)|^2} - \frac{2|x^\top(t)g(x(t), t)|^2}{1 + |x(t)|^2})dt \\
&+ \frac{2x^\top(t)g(x(t), t)}{1 + |x(t)|^2}dB(t) \\
&\geq (\frac{(c_5 - c_1) + (c_6 - c_2)|x(t)|^2}{1 + |x(t)|^2} - \frac{2c_3|x(t)|^2 + 2c_4|x(t)|^4}{1 + |x(t)|^2})dt \\
&+ \frac{2x^\top(t)g(x(t), t)}{1 + |x(t)|^2}dB(t) \\
&= \frac{H(|x(t)|^2)}{(1 + |x(t)|^2)^2}dt + \frac{2x^\top(t)g(x(t), t)}{1 + |x(t)|^2}dB(t)
\end{aligned}$$

这里 $H(u) = a + cu + bu^2$ 且 $H : R_+ \to R$, 其中变量的 a, b, c 定义如定理中所示.
下面我们将分两种情况讨论:

(1) 因为 $c \geq 2(a \wedge b)$, 则 $H(u) \geq (a \wedge b)(1 + u)^2$, 其中 $u \geq 0$,

因此就有

$$\frac{H(|x(t)|^2)}{(1 + |x(t)|^2)^2} \geq (a \wedge b)$$

所以由上面的式子我们可以得到

$$\log(1 + |x(t)|^2) \geq \log(1 + |x_0|^2) + (a \wedge b)t + M(t) \tag{2.9}$$

在这里

$$M(t) = \int_0^t \frac{2x^\top(s)g(x(s), s)}{1 + |x(s)|^2}dB(s)$$

$M(t)$ 是一个连续鞅, 且初始值为 $M(0) = 0$, 我们计算它的均方变差可以得到

$$\begin{aligned}
\langle M(t), M(t)\rangle &= \int_0^t \frac{4|x^\top(s)g(x(s), s)|^2}{(1 + |x(s)|^2)^2}d(s) \\
&\leq \int_0^t \frac{4(c_3|x(s)|^2 + c_4|x(s)|^4)}{(1 + |x(s)|^2)^2}d(s) \\
&\leq 4(c_3 + c_4)t
\end{aligned}$$

所以由强大数定律，我们可以得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=0 \quad a.s.$$

在式 (2.9) 的两边令 $t\to\infty$, 则有

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(1+|x(t)|^2)\geq(a\wedge b) \quad a.s.$$

(2) 在 $ab>\frac{1}{4}c^2$ 的情况下，我们可以找到一个正数 λ, 使它满足 $H(u)\geq\lambda(1+u)^2$, 对任意的 $u\geq 0$ 都成立，写作

$$\begin{aligned}H(u)-\lambda(1+u)^2 &= a-\lambda+(c-2\lambda)u+(b-\lambda)u^2\\ &= \begin{pmatrix}1 & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-\lambda & 0.25(c-2\lambda)\\ 0.25(c-2\lambda) & b-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ u\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此上式成立的条件是

$$\lambda\leq a\wedge b,$$

且

$$(a-\lambda)(b-\lambda)\geq 0.25(c-2\lambda)^2.$$

也就是说

$$\lambda\leq a\wedge b,$$

且

$$(a+b-c)\lambda\leq ab-0.25c^2.$$

因为 $c<2(a\wedge b)$, 所以 $c<2(a\wedge b)\leq a+b$, 因此我们可以选择正数

$$\lambda=\min\{a,b,\frac{ab-0.25c^2}{a+b-c}\}.$$

对上式都成立，因此

$$\frac{H(|x(t)|^2)}{(1+|x(t)|^2)^2}\geq\lambda.$$

所以从前面的式子中我们可以得到

$$\log(1+|x(t)|^2)\geq\log(1+|x_0|^2)+\lambda t+M(t)$$

这里 $M(t)$ 与前面的是相同的，所以令 $t\to\infty$, 我们可以得到

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(1+|x(t)|^2)\geq\lambda \quad a.s.$$

例 3 如果对于随机微分方程

$$dx = f(x,t)dt + g(x,t)dB(t)$$

有

$$|f(x,t)| \vee |g(x,t)| \leq K(1+x),$$

则

$$\begin{aligned} -2\langle x, f(x,t)\rangle &\leq 2|x||f(x,t)| \\ &\leq 2|x| \times K(1+|x|) \\ &\leq 2K|x| + 2K|x|^2 \\ &\leq K + 3K|x|^2 \end{aligned}$$

其中 $2K|x| \leq K + K|x|^2$, 且有

$$\begin{aligned} |x^\top g(x,t)|^2 &\leq |x|^2|g(x,t)|^2 \\ &\leq K^2|x|^2(1+|x|)^2 \\ &\leq 2K^2(|x|^2+|x|^4) \end{aligned}$$

但是仅仅满足以上的条件并不能保证上述随机微分方程的解指数增长，这也说明其他条件也是很重要的.

例 4 给定一个标量系统

$$\dot{y}(t) = f(y(t),t),$$

它的解是有界的.

那么下面我们将说明，我们能随机地扰动它，使它变成一个随机微分方程，并且它的解依概率多项式增长.

我们来考虑一个常微分方程

$$\dot{y}(t) = p - qy(t), \quad t \geq 0$$

这里 p 和 q 都是正数.

我们可以知道，对于任意给定的初始值，方程的解都满足

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{p}{q},$$

也就是说，该解是渐近有界的.

让我们再考虑一个与之相应的线性随机微分方程

$$dx(t) = (p - qx(t))dt + (u + vx(t))dB(t)$$

这里 u 和 v 都是正数，且 $B(t)$ 是一个标量布朗运动，其中

$$f(x,t) = p - qx, \quad g(x,t) = u + vx$$

对所有的 $(x,t) \in R \times R_+$ 都成立.

计算可得

$$x^\top f(x,t) = px - qx^2 \leq \frac{p^2}{4q}$$

同样，对任意足够小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} |g(x,t)|^2 &= u^2 + 2uvx + v^2x^2 \\ &\leq u^2 + \frac{u^2v^2}{\varepsilon} + (v^2 + \varepsilon)x^2 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} |xg(x,t)|^2 &= u^2x^2 + 2uvx^3 + v^2x^4 \\ &\geq (v^2 - \varepsilon)x^4 - \rho \end{aligned}$$

这里 $-\rho$ 是 $u^2x^2 + 2uvx^3 + \varepsilon x^4 (x \in R)$ 的一个下界.

通过定理 2.9, 我们可以看到，该随机微分方程的解满足

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log(|x(t)|)}{\log t} \leq \frac{v^2 - \varepsilon}{v^2 - 3\varepsilon} \quad a.s.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 则有

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log(|x(t)|)}{\log t} \leq 1 \quad a.s.$$

也就是说，该随机微分方程的解依概率多项式增长.

3 系数满足多项式增长条件的随机微分方程的稳定性

在这一章中，我们将研究非线性系统的随机稳定性. 给定一个不稳定的微分方程

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

其中 f 满足单边多项式增长条件.

我们引进一个噪声干扰 $B(t)$, 因此，这个系统就变成了一个非线性的随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \tag{2.10}$$

其中 $t \geq t_0$, 且 $f : R \times R_+ \to R$ 与 $g : R \times R_+ \to R$ 是 $Borel$ 可测函数，并且满足 $f(x(0), 0) \equiv 0, g(x(0), 0) \equiv 0$.

我们给出下面的一些假设：

假设 3.1 存在非负实数 δ, α, γ**,** 满足

$$xf(x(t), t) \leq \delta x^{\alpha+2} + \gamma x^2$$

对所有的 $(x, t) \in R \times R_+$ 都成立，这也就是说 f 满足单边多项式增长条件.

假设 3.2 假设上述随机微分方程的两个系数 f 和 g 都满足局部李普希茨条件，这个也就是说，对于每一个 $k = 1, 2, \cdots$, 都会存在一个正数 H_k, 使得

$$|f(x,t) - f(y,t)| \vee |g(x,t) - g(y,t)| \leq H_k|x - y|$$

对所有的 $t \geq 0$ 均成立，并且 $x, y \in R, x \vee y \leq k$.

假设 3.3 存在非负实数 σ, β, q**,** 满足

$$g^2(x, t) \leq \sigma x^{\beta+2} + qx^2$$

对所有的 $(x, t) \in R \times R_+$ 都成立，这也就是说 g 满足多项式增长条件.

在这一章中，我们将说明合适的系数 β 将会保证该随机微分系统存在一个唯一的全局解. 尽管相应的确定系统可能在有限时间能爆破，但是足够大的 q 却是可以确保这个随机微分系统是几乎必然指数稳定的.

3.1 解的存在性

定义 3.1 令 $x(t), 0 \le t \le \tau_e$ 是一个连续的 R 值 $\mathcal{F}_t$ 适应过程，如果满足

$$x(t \wedge \tau_k) = x(0) + \int_0^{t\wedge\tau_k} f(x(s), s)ds + \int_0^{t\wedge\tau_k} g(x(s), s)dB(s)$$

且 $t \ge 0$, 初始值 $x(0) \in R$, 则 $x(t)$ 就称为方程的一个局部强解.

对每一个 $k \ge 1, \{\tau_k\}_{k\ge1}$ 是一个有限停时的非减序列，且当 $k \to \infty$ 时，有 $\tau_k \to \tau_e \quad a.s.$

如果当 $\tau_e < \infty$ 的时候，如果有

$$\limsup_{t\to\tau_e} |x(t)| = \infty$$

几乎处处成立，则称 $x(t)$ 为一个最大的局部强解，称 τ_e 为爆破时间.

一个最大的局部强解 $x(t)$, 其中 $0 \le t < \tau_e$, 称为唯一的，如果对于任意其他的最大局部强解 $\bar{x}(t), 0 \le t < \bar{\tau}_e$, 有 $\tau_e = \bar{\tau}_e$ 和 $x(t) = \bar{x}(t)$ 对任意的 $0 \le t < \tau_e$ 几乎必然成立.

引理 3.1 在假设 3.2 成立的条件下，对于任意的初始值 $x(0) \in R$, 如果有 $\beta \ge 0$, 则方程在 $[0, \tau_e)$ 上有一个唯一的最大局部强解，其中 τ_e 是爆破时间.

引理 3.2 在假设 3.2 成立的条件下，对于所有在 R 上的 $x(0) \ne 0$, 如果有 $\beta \ge 0$, 则有

$$P\{x(t) \ne 0 | 0 \le t < \tau_e\} = 1$$

下面给出方程的全局解的存在定理

定理 3.1 在假设 $3.1, 3.2, 3.3$ 都成立的条件下，对于任意的初始值 $x(0) = \xi \in \mathcal{L}^b_{\mathcal{F}}(\Omega, R)$, 且满足 $x(0) \ne 0$, 如果 $\sigma \ne 0, \beta > \alpha > 0$, 则方程在 $t \in [0, \infty)$ 上几乎必然存在一个唯一的全局解 $x(t)$.

证 对于任意有界的初始值 $x(0) \in R$, 引理 3.1 说明方程 (2.10) 在 $t \in [0, \tau_e)$ 上存在一个唯一的最大局部强解，其中 τ_e 是爆破时间. 为了证明这个解是全局解，我们只需要证明 $\tau_e = \infty, a.s.$

令 k_0 是一个足够大的正数且满足 $|x(0)| < k_0$, 对于每一个整数 $k \ge k_0$, 定义停时

$$\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau_e) : |x(t)| \ge k\}$$

其中 $\inf \emptyset = \infty, \emptyset$ 表示空集. 当 $k \to \infty$ 时， τ_k 是不断增大的，且 $\tau_k \to \tau_\infty \le \tau_e \quad a.s.$ 如果我们能证明 $\tau_\infty = \infty$, 则 $\tau_e = \infty \quad a.s.$ 即得到了我们所需要的结果.

这也等于要证明对于任何 $t > 0$, 有 $P(\tau_k \le t) \to 0$ 成立. 当 $k \to \infty$ 时，为了证明这一点，对于任意的 $p \in (0,1)$, 我们定义一个 C^2 的函数

$$V(x) = |x(t)|^p$$

由引理 3.2 我们可得 $x(t) \neq 0$ 对于所有的 $0 \le t < \tau_e \quad a.s.$ 都是成立的，因此我们可以应用 $It\hat{o}$ 公式去证明对于任意的 $t \in [0, \tau_e)$, 都有

$$dV(x) = LV(x(t))dt + M_1(t)$$

其中

$$M_1(t) = p|x|^{p-2}x^\top g dB(t)$$

且

$$\begin{aligned} LV(x) &= p|x|^{p-2}x^\top f + \frac{p(p-1)}{2}|x|^{p-2}|g|^2 \\ &\le p|x|^{p-2}(\delta|x|^{\alpha+2} + \gamma|x|^2) + \frac{p(p-1)}{2}|x|^{p-2}(\sigma|x|^{\beta+2} + q|x|^2) \\ &= p\delta|x|^{p+\alpha} + p\gamma|x|^p + \frac{p(p-1)\sigma}{2}|x|^{p+\beta} + \frac{qp(p-1)}{2}|x|^p \\ &= \frac{p(p-1)\sigma}{2}|x|^{p+\beta} + p\delta|x|^{p+\alpha} + (p\gamma + \frac{qp(p-1)}{2})|x|^p \end{aligned}$$

因为 $p \in (0,1)$, 所以当 $\beta > \alpha > 0$ 时，有 $\sigma \neq 0$,

且

$$\frac{\sigma p(p-1)}{2} < 0.$$

所以由多项式函数的有界性定理可知，存在一个正常数 $\bar{H}$, 使得

$$LV(x) \le \bar{H},$$

因此对前面的式子两边先求积分后求期望. 我们就可以得到

$$\begin{aligned} EV(x(t \wedge \tau_k)) &\le E|\xi|^p + E\int_0^{t\wedge\tau_k} LV(x(s))ds \\ &\le E|\xi|^p + \bar{H}t \\ &=: \bar{H}_t \end{aligned}$$

这里 $\bar{H}_t$ 与 k 无关，由 τ_k 的定义，我们可得

$$|x(\tau_k)| = k,$$

所以

$$\begin{aligned} P(\tau_k \le t)k^p &\le P(\tau_k \le t)V(x(\tau_k)) \\ &\le E[I_{\{\tau_k \le t\}}V(x(t \wedge \tau_k))] \\ &\le EV(x(t \wedge \tau_k)) \\ &\le \bar{H}_t \end{aligned}$$

这说明

$$\limsup_{k\to\infty} P(\tau_k \le t) \le \lim_{k\to\infty} \frac{\bar{H}_t}{k^p} = 0$$

其中 $p \in (0,1), k \to \infty, k^p \to \infty.$

即得到所求结果.

例 5　对于随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t)$$

我们令

$$f(x(t),t) = x(t)[1 + x(t)],$$

且

$$g(x(t),t) = x^2(t),$$

则可以得到方程

$$dx(t) = x(t)[1 + x(t)]dt + x^2(t)dB(t)$$

其中 $t \ge 0, x(0) = 1.$

所以就有

$$x^\top(t)f(x(t),t) = x^3(t) + x^2(t),$$

和

$$|g(x(t),t)|^2 = x^4(t),$$

所以

$$\delta = \alpha = \gamma = \sigma = 1, \quad q = 0, \quad \beta = 2,$$

所以由前面的定理 3.1 可知该方程存在唯一的一个全局解.

3.2 有界性

定理 3.1 显示了方程 (2.10) 的解在当 $\sigma \neq 0$ 且 $\beta > \alpha > 0$ 满足时，将不会在有限时间内爆破. 与解的爆破性相比较，解的渐近稳定性将会更加有趣.

在这一小节中，我们将会介绍随机扰动也同样能保证某些确定系统的有界性，其中包括大概率的矩有界性和轨道有界性. 而在这里我们将要讨论的是矩有界性和随机最终有界性.

定理 3.2　在假设 3.1, 3.2, 3.3 都成立的条件下，对于任意的初始值

$$x(0) = \xi, \xi \in \mathcal{L}^b_{\mathcal{F}_0}(\Omega, k),$$

其中满足 $x(0) \neq 0$, 且 $p \in (0, 1)$. 如果有 $\sigma \neq 0$, 且 $\beta > \alpha > 0$ 成立，则存在一个常数 K_p, 使得方程 (2.10) 的解 $x(t)$ 具有如下特征：

$$\limsup_{t\to\infty} E|x(t)|^p \leq K_p$$

这里 K_p 只与 p 有关，与初始值 ξ 无关，也就是说 $x(t)$ 具有矩有界性.

证　对于任意的 $\varepsilon > 0$,

令

$$V(x(t)) = |x(t)|^p$$

则

$$U(x(t)) = e^{\varepsilon t}V(x(t)) = e^{\varepsilon t}|x(t)|^p$$

其中 $p \in (0, 1)$. 对 $U(x(t))$ 应用 $It\hat{o}$ 公式我们可以得到

$$dU(x(t)) = (\varepsilon U(x) + e^{\varepsilon t}LV)dt + M_2(t)$$

其中

$$LU = p|x|^{p-2}x^\top f + \frac{p(p-2)}{2}|x|^{p-2}|g|^2$$

$$M_2(t) = e^{\varepsilon t}p|x|^{p-2}x^\top g dB(t)$$

其中

$$e^{-\varepsilon t}dU = (\varepsilon e^{-\varepsilon t}U + LV)dt + e^{-\varepsilon t}M_2(t)$$

$$Ee^{-\varepsilon t}\int_0^t dU = E\int_0^t(\varepsilon e^{-\varepsilon s}U + LV)ds$$

所以

$$Ee^{-\varepsilon t}(e^{\varepsilon t}V(t) - V(0)) = E\int_0^t(\varepsilon e^{-\varepsilon s}U + LV)ds$$

所以

$$EV(t) = e^{-\varepsilon t}EV(x(0)) + e^{-\varepsilon t}E\int_0^t(\varepsilon U + e^{\varepsilon s}LV)ds$$

即得到了

$$EV(x(t)) = e^{-\varepsilon t}EV(x(0)) + e^{-\varepsilon t}E\int_0^t(\varepsilon U(x(s)) + e^{\varepsilon s}LV(x(s)))ds$$

所以由前面证明中的结论可得

$$\begin{aligned} LV(x) &= \frac{p(p-1)\sigma}{2}|x|^{p+\beta} + p\delta|x|^{p+\alpha} + (p\gamma + \frac{qp(p-1)}{2})|x|^p \\ &\le \bar{V} \end{aligned}$$

我们可以得到

$$\begin{aligned} LV(x(s)) + \varepsilon e^{-\varepsilon t}U(x(s)) &\le \frac{p(p-1)\sigma}{2}|x|^{p+\beta} + p\delta|x|^{p+\alpha} \\ &+ (p\gamma + \frac{qp(p-1)}{2} + \varepsilon)|x|^p \end{aligned}$$

类似的，由多项式函数的有界性定理，我们可以得到，存在一个常数 $\tilde{H}$, 满足

$$LV(x(s)) + \varepsilon e^{-\varepsilon t}U \le \tilde{H}$$

这也就是说

$$\begin{aligned} EV(x(t)) &= e^{-\varepsilon t}EV(x(0)) + e^{-\varepsilon t}E\int_0^t(\varepsilon U(x(s)) + e^{\varepsilon s}LV(x(s)))ds \\ &= e^{-\varepsilon t}E|\xi|^p + e^{-\varepsilon t}E\int_0^t(e^{\varepsilon s}\tilde{H})ds \\ &= e^{-\varepsilon t}E|\xi|^p + \frac{\tilde{H}}{\varepsilon}(1 - e^{-\varepsilon t}) \end{aligned}$$

令 $t \to \infty$, 得到

$$\limsup_{t\to\infty} E|x(t)|^p \le \frac{\tilde{H}}{\varepsilon}$$

令

$$K_p = \frac{\tilde{H}}{\varepsilon}$$

则

$$\limsup_{t\to\infty} E|x(t)|^p \le K_p.$$

即结论得证.

下面的引理指明阶矩有界包含了随机最终有界性.

引理 3.3 对于任意的 $p > 0$, 如果随机过程 $x(t)$ 是 p 阶矩有界，且

$$\limsup_{t\to\infty} E|x(t)|^p \le K_p,$$

这里 K_p 是一个与 p 有关的常数，则 $x(t)$ 就具有随机最终有界性，也就是说，对于任意的 $\epsilon \in (0,1)$, 存在一个常数 $H = H(\epsilon)$, 使得 $x(t)$ 具有如下特征

$$\limsup_{t\to\infty} P\{|x(t)| \le H\} \ge 1 - \epsilon$$

证 对于任意的 $\epsilon \in (0,1)$,

令

$$H = \frac{K_p^{1/p}}{\epsilon^{1/p}},$$

则

$$H^p = \frac{K_p}{\epsilon},$$

则由 $Chebyshev's$ 不等式有

$$\begin{aligned} P\{|x(t)| > H\} &\le \frac{E|x(t)|^p}{H^p} \\ &\le \frac{K_p}{H^p} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

因此有

$$\limsup_{t\to\infty} P\{|x(t)| \le H\} \ge 1 - \epsilon$$

的证.

3.3 指数稳定性

我们刚刚证明了在 $\sigma \neq 0, \beta > \alpha > 0$ 的情况下，随机扰动能抑制解的指数爆破，且证明了解的存在性及唯一性，接着又证明了解的矩有界性和依概率轨道有界性.

在这一节中，我们将说明在相同的情况下，足够大的 q 将使方程 (2.10) 指数稳定.

引理 3.3 令假设 3.1, 3.2, 3.3 都成立，并且 $\sigma \neq 0, \beta > \alpha > 0$ 也成立，如果

$$\frac{q}{2} - \varphi > 0$$

这里

$$\varphi = \max_{x \geq 0}\{-\frac{1}{2}|x|^{\beta} + \delta|x|^{\alpha} + \gamma\}$$

于是对于任意给定的初始值 $x(0) = \xi \in \mathcal{L}^b_{\mathcal{F}_0}(\Omega, R)$, 满足 $x(0) \neq 0$, 且存在足够小的常数

$$\epsilon \in (0, \frac{q}{2} - \varphi).$$

则方程 (2.10) 的全局解会有这样的特征

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\log|x(t)|}{t} \leq -(\frac{q}{2} - \varphi) + \epsilon \quad a.s.$$

也就是说，方程 (2.10) 的解是指数稳定的.

证 由引理 3.2 和定理 3.1, 我们可得 $x(0) \neq 0$, 对于所有的 $0 \leq t < \infty, a.s.$ 都成立.

对 $\log|x(t)|$ 应用 $It\hat{o}$ 公式，我们可以得到

$$d(\log|x(t)|) = (|x|^{-2}x^{\top}f + (-\frac{1}{2})|x|^{-2}|g|^2)dt + |x|^{-2}x^{\top}gdB(t)$$

两边积分得

$$\begin{aligned}\int_0^t d(\log|x(s)|) &= \int_0^t (|x|^{-2}x^{\top}f + (-\frac{1}{2})|x|^{-2}|g|^2)ds \\ &+ \int_0^t |x|^{-2}x^{\top}gdB(s)\end{aligned}$$

所以

$$\log|x(t)| = \log|x(0)| + H_1(t) + M_3(t) \tag{3.11}$$

其中

$$\begin{aligned}H_1(t) &= \int_0^t (|x|^{-2}x^{\top}f + (-\frac{1}{2})|x|^{-2}|g|^2)ds \\ &\leq \int_0^t (\delta|x|^{\alpha} + \gamma - \frac{1}{2}\sigma|x|^{\beta} - \frac{1}{2}q)ds\end{aligned}$$

且

$$M_3(t) = \int_0^t |x|^{-2} x^\top g dB(s)$$

且均方变差为

$$\langle M_3, M_3 \rangle_t = \int_0^t |x|^{-2} |g|^2 ds$$

其中 $M_3(t)$ 是一个连续局部鞅,

对于任意的 $\varepsilon \in (0,1)$, 选取 $\theta > 0$ 且 $\varepsilon\theta > 1$,

且对每一个整数 $m > 0$, 用指数鞅不等式我们可得

$$P\{\sup_{1 \le t \le n} [M_3(t) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t |x|^{-2} |g|^2 ds] \ge \theta\varepsilon \log n\} \le \frac{1}{m^{\theta\varepsilon}}$$

其中

$$\alpha = \varepsilon,$$

$$\beta = \theta\varepsilon \log n,$$

$$e^{-\alpha\beta} = \frac{1}{m^{\theta\varepsilon^2}} \le \frac{1}{m^{\theta\varepsilon}}$$

因为

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\theta\varepsilon}} < \infty,$$

所以由 $Borel - Cantelli$ 引理，存在一个 $\Omega_0 \in \Omega$, 且 $P(\Omega_0) = 1$, 对于所有的 $\omega \in \Omega_0$ 都成立，存在一个整数 $m_0(\omega)$, 当 $m > m_0(\omega)$ 时，有

$$m - 1 \le t \le m$$

所以

$$\begin{aligned} M_3(t) &\le \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t |x|^{-2} |g|^2 ds + \theta\varepsilon \log m \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t |x|^{-2} |g|^2 ds + \theta\varepsilon \log(t+1) \end{aligned}$$

则式 (3.11) 可以变为

$$\log |x(t)| = \log |\xi| + \int_0^t (-\frac{1-\varepsilon}{2} |x|^\beta + \delta |x|^\alpha + \gamma - \frac{1-\varepsilon}{2} q) ds + \theta\varepsilon \log(t+1)$$

其中

$$\varphi = \max_{x \ge 0} \{-\frac{1}{2} |x|^\beta + \delta |x|^\alpha + \gamma\}$$

令 ϵ 足够小，由 φ 的定义，对足够小的 $\epsilon \in (0, \frac{q}{2} - \varphi)$，我们有

$$\log|x(t)| \le \log|\xi| - [(\frac{q}{2} - \varphi) - \epsilon]t + \theta\varepsilon\log(t+1)$$

所以

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|x(t)|}{t} \le -(\frac{q}{2} - \varphi) + \epsilon \quad a.s.$$

得证.

例 6 对于随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t), t \ge 0$$

我们令

$$f(x(t), t) = x(t)[1 + x(t)],$$

且

$$g(x(t), t) = 2x(t) + x^2(t),$$

则

$$x^\top(t)f(x(t), t) = x^3(t) + x^2(t)$$

且

$$\begin{aligned} |g(x(t), t|^2 &= x^4(t) + 4x^3(t) + 4x^2(t) \\ &\le 4x^{7/2}(t) + 4x^2(t) \end{aligned}$$

所以

$$\delta = \gamma = \alpha = 1,$$

$$\sigma = 4, q = 4, \beta = 3/2,$$

则有

$$\varphi = \max_{x\ge 0}\{-\frac{1}{2}x^{3/2} + x + 1\} = \frac{43}{27},$$

所以

$$\frac{q}{2} - \varphi = 2 - \frac{43}{27} = \frac{11}{27}.$$

所以有引理 3.3 可知，上述随机微分方程的解有如下特征

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|x(t)|}{t} \le -\frac{11}{27} + \epsilon \quad a.s.$$

结 束 语

在学完了胡老师的《随机微分方程》和吴老师讲的英文版的《随机微分方程》之后，在雷老师的指导下我又阅读了大量的关于随机微分方程的稳定性质的文献，包括随机微分方程的解的存在性与唯一性，有界性与稳定性等等．在阅读了大量文献资料的基础上又结合本专业的相关知识，本文进一步研究了当随机微分方程的系数分别满足线性增长条件与满足多项式增长条件这两种情况下该随机微分方程的解的存在性及一些稳定性质，并且举例进行了说明．由于时间的关系，关于随机微分方程的解的一些其他性质在本文中并没有进行深入的研究与说明，也没有得出一般性的结论，这是本文的缺陷．

致　谢

本论文是在导师雷冬霞老师的悉心指导下完成的．在这两年硕士学习期间，雷老师不管是在学习上还是生活上等的各个方面都给予了我非常大的支持与帮助．学习上，雷老师对我悉心指导；生活方面，雷老师在很多方面都给予了我关心和帮助，特别是经常和雷老师交流，使我学到了很多为人处事的道理，这些都是书本上学不到的，在此要向雷老师表示衷心感谢！

在这里我要衷心感谢我的父母，弟弟及亲朋好友，是他们一如既往的支持和鼓励使我能够刻苦努力的学习和不断地取得进步，此外我还要衷心感谢我的师姐，师妹和同学们，和他们一起学习生活，使我的研究生生活充实快乐，丰富多彩．他们不管在学习上还是生活上都给予了我很大的帮助，在此我要向他们表示我最衷心的感谢！

最后我还要衷心感谢审阅本论文的各位老师，感谢他们为本论文提出的宝贵意见．同时也感谢数学与统计学院的全体领导和老师，使我顺利地完成了硕士阶段的学业．

参考文献

[1] Mao, X. Stochastic Differential Equations and Their Applications. Chichester U.K.: Horwood, 1997.

[2] Hasminskii, R.Z. Stochastic Stability of Differential Equations. Alphen aan den Rijn, The Netherlands: Sijthoff and Noordhoof, 1981.

[3] Arnold, L., Crauel, H., and Wihstutz, V. Stabilitzation of Linear System by Noise. SIAM Journal on Control and Optimization, 1983, 21: 451-461.

[4] Mao, X. Exponential Stability of Stochastic Differential Equations. New York: Dekker, 1997.

[5] Appleby, J.A.D., Mao, X. Stochastic Stabilization of Functional Differential Equations. Systems and Control Letters, 2005, 54: 1068-1081.

[6] Appleby, J.A.D., Mao, X., and Rodkina, A. Stabilization and Destabilization of Nonlinear Differential Equations by Noise. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53: 683-691.

[7] Marion, G., Mao, X., and Renshaw, E. Convergence of the Euler Scheme for a Class of Stochastic Differential Equation. International Mathematical Journal, 2002, 1: 9-22.

[8] Bahar, A., and Mao, X. Stochastic Delay Lotka-Volterra Model. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 292: 364-380.

[9] 胡适耕，黄乘明，吴付科．随机微分方程．科学出版社, 2008.

[10] Mao, X. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching. Stochastic Processes and their Applications, 1999, 79: 45-67.

[11] Fuke Wu, Shigeng Hu. Suppression and stabilisation of noise . Systems and Control Letters, 2009, 82: 2150-2157.

[12] Feiqi Deng, Qi Luo, Mao, X., Sulin Pang. Noise suppresses or expresses exponential growth. Systems and Control Letters, 2008, 57: 262-270.

[13] Guangda Hu, Mingzhu Liu, Mao, X., Minghui Song. Noise expresses exponential growth under regime switching. Systems and Control Letters, 2009, 58: 691-699.

[14] Francesco Amato, Marco Ariola, Peter Dorat. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances. Automatica, 2001, 37: 1459-1463.

[15] Emmanuel Moulaya, Michel Dambrineb, Nima Yeganefarc, Wilfrid Perruquetti. Finite-time stability and stabilization of time-delay systems. Systems and Control Letters, 2008,

57:61-566.

[16] Weisheng Chena, L.C. Jiao. Finite-time stability theorem of stochastic nonlinear systems. Automatica, 2010, 46: 2105-2108.

[17] Juliang Yin, Mao, X., and Fuke Wu. Generaltzed Stochastic Delay Lotka-Volterra Systems. Stochastic Models, 2009, 25: 436-454.

[18] Xianqing Huang, Wei Lin, BoYang. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. Automatica, 2005, 41: 881-888.

[19] Mao, X., M. Riedleb. Mean square stability of stochasticVolterra integro-differential equations. Systems and Control Letters, 2006, 55: 459-465.

[20] Song Zhu, Yi Shen, Guici Chen. Noise suppress or express exponential growth for hybrid Hopfield neural networks Physics Letters A., 2010, 374: 2035-2043.

[21] Guangda Hu, Mingzhu Liu, Mao, X., Minghui Song. Noise suppresses exponential growth under regime switching. J. Math. Anal. Appl., 2009, 355: 783-795.

[22] John A.D. Appleby, David W. Reynolds. Non-exponential stability of scalar stochastic Volterra equations. Statistics and Probability Letters, 2003, 62: 335-343.

[23] Tom$\acute{a}$s Caraballo, Kai Liu, Mao, X.. On Stabilization of Partial Differential Equantions by Noise. Nagoya Math. J., 2001, 161: 155-170.

[24] Fuke Wu, Yangzi Hu. Pathwise estimation of the stochastic functional Kolmogorov-type system. Journal of the Franklin Institute, 2009, 346: 191-205.

[25] Xiaoyue Li, Daqing Jiang, Mao, X.. Population dynamical behavior of Lotka-Volterra system under regime switching. J. Comput. Appl. Math., 2009, 232: 427-448.

[26] Fuke Wu, Shigeng Hu, Yue Liu. Positive solution and its asymptotic behaviour of stochastic functional Kolmogorov-type system. J. Math. Anal. Appl., 2010, 346: 104-118.

[27] Fuke Wu, Shigeng Hu. Stochastic suppression and stabilization of delay differential systems. Int. J. Robust. Nonlinear Control, 2010.

[28] Mao, X., G. GeorgeYin, Chenggui Yuan. Stabilization and destabilization of hybrid systems of stochastic differential equations. Automatica, 2007, 43: 267-273.

[29] John A. D. Appleby, Mao, X., Alexandra Rodkina. Stabilization and Destabilization of Nonlinear Differential Equations by Noise. Stojanović M., 2008, 53: 683-691.

[30] 邱妍，朱永忠．随机微分方程 2 种数值方法的稳定性分析． 河海大学常州分校学报, 2007, 21: 35-38.

[31] 朱霞，李建国，李宏智，姜珊珊．随机微分方程 Milstein 方法的稳定性． 华中科技大学学报 (自然科学版), 2003, 31: 111-113.

[32] 刘早清，陆云霞．一类随机微分方程的稳定性． 应用数学, 2006, 19: 782-786.

[33] 张艳，王晓静，张丽霞． *Itô* 型倒向随机微分方程的随机稳定性比较定理． 北京建筑工程学院学报, 2004, 20: 69-72.

[34] 朱霞，阮立志．求解随机微分方程的两种方法的稳定性分析． 中南民族大学学报 (自然科学版), 2006, 25: 98-100.

[35] Arifah Bahar, Mao, X.. Stochastic delay Lotka Volterra model. J. Math. Anal. Appl., 2004, 292: 364-380.

[36] Mao, X., Chenggui Yuan, Jiezhong Zou. Stochastic differential delay equations of population dynamics. J. Math. Anal. Appl., 2005, 304: 296-320.

[37] Fuke Wu, Shigeng Hu. Stochastic functional Kolmogorov-type population dynamics. J. Math. Anal. Appl., 2008, 347: 534-549.

[38] Chenggui Yuan, Mao, X., John Lygeros. Stochastic hybrid delay population dynamics:Well-posed models and extinction. Journal of Biological Dynamics, 2009, 3: 1-21.

[39] Qi Luo, Mao, X.. Stochastic population dynamics under regime switching. J. Math. Anal. Appl., 2007, 334: 69-84.

[40] Qi Luo, Mao, X.. Stochastic population dynamics under regime switching II. J. Math. Anal. Appl., 2009, 355: 577-593.

[41] Fuke Wu, Yong Xu. Stochastic Lotka-Volterra Population Dynamics With Infinite Delay. Siam J. Appl. Math., 2009, 70: 641-657.

[42] Fuke Wu, Mao, X., Shigeng Hu. Stochastic suppression and stabilization of functional differential equations. Systems and Control Letters, 2010, 59: 745-753.

[43] Francesco Amato, Marco Ariola, Carlo Cosentino. Finite-time stabilization via dynamic output feedback. Automatica, 2006, 42: 337-342.

[44] Hào D N. A mollification method for ill-posed problem. Numer.Math., 1994, 68: 469-506

一维随机微分方程的稳定性
作者：　谢晶晶
学位授予单位：　华中科技大学

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Thesis_D190597.aspx